**Cистема оценивания**

**Ответы к заданиям В1-В15**

Каждое из заданий В1–В15 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

|  |  |
| --- | --- |
| **№ задания** | **Ответ** |
|  B1 | 8 |
| B2 | 320 |
|  B3 | 7 |
|  B4 | 192 000 |
|  B5 | 12 |
|  B6 | 0,92 |
|  B7 | 9 |
|  B8 | 64 |
|  B9 | 3 |
| B10 | 4 |
| B11 | –0,8 |
| B12 | 751 |
| B13 | 20 |
| B14 | 5 |
| В15 |  -5 |

**Решения и критерии оценивания заданий С1–С6**

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий С1–С6, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях.

 **С1**

а) Решите уравнение $\cos(2x=1-cos⁡(\frac{π}{2}-x))$.

 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\left.\frac{5π}{2}; -π\right)\right.$

**Решение.**

а) Преобразуем обе части уравнения:

 $1-2sin^{2}x=1-\sin(x;2sin^{2}x-\sin(x=0; ))\sin(x\left(2\sin(x)-1\right)=0, )$

откуда $\sin(x=0 или\sin(x=\frac{1}{2}.))$

Из уравнения sin x = 0 находим x = πn, где $n\in Z$.

Из уравнения $\sin(x=\frac{1}{2})$ находим $x=\frac{\left(-1\right)^{k}π}{6}+ πk$ , где $k\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\left.\frac{5π}{2}; -π\right)\right.$.

Получаем числа: $-2π; -\frac{11π}{6}; -\frac{7π}{6}.$

Ответ: а) $πn, n\in Z; \frac{\left(-1\right)^{k}π}{6}+ πk, k\in Z. $

 б)$ -2π; -\frac{11π}{6}; -\frac{7π}{6}.$

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведен обоснованный отбор корней | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**С2**

В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 известны ребра AB = 3,

AD = 2, AA1 = 5.Точка *О* принадлежит ребру BB1 и делит его в соотношении2:3, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C1.



**Решение.** Сечение плоскостью AOC1 пересекает ребро DD1 в точке P. Отрезок АР параллелен отрезку АО. Следовательно искомое сечение – параллелограмм АОС1(рис.1).

$$BO=\frac{2}{5}BB\_{1}=2, B\_{1}O=3.$$

$$C\_{1}O=\sqrt{C\_{1}B\_{1}^{2}+B\_{1}O^{2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}}.$$

$$AO= \sqrt{AB^{2}+BO^{2} }=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}.$$

Значит, АОС1Р – ромб. Найдем диагонали этого ромба:

 $AC\_{1}=\sqrt{AB^{2}+BC^{2}+CA^{2}}=\sqrt{9+4+25}=\sqrt{38},$

 $OP=2\sqrt{AO^{2}-\frac{1}{4}AC\_{1}^{2}}=\sqrt{4\*13-38}=\sqrt{14}$.

Тогда $S\_{AOC\_{1}P}=\frac{AC\_{1}\*OP}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{38}\*\sqrt{14}=\sqrt{133}.$

 Ответ: $\sqrt{133}.$

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обоснованно получены верные ответы  | 2 |
| Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**C3** Решите систему неравенств

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{3-x}\frac{x-4}{(x-3)^{2}}\geq -2\\x^{3}+6x^{2}+ \frac{21x^{2}+3x-12}{x-4}\leq 3\end{array}\right.$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$log\_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^{2}}\geq -2; log\_{3-x}(x+4)-log\_{3-x}\left(x-3\right)^{2}\geq -2; log\_{3-x}\left(x+4\right)\geq 0 .$$

Рассмотрим два случая. Первый случай : 0 < 3 – x < 1.

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{3-x}x+4\geq 0,\\0 < 3 – x < 1;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}0<x+4\leq 1,\\2<x<3;\end{array}\right. нет решений.$$

Второй случай: 3 – x > 1.

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{3-x}x+4\geq 0,\\ 3 – x> 1;\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x+4\geq 1,\\x<2;\end{array} откуда-3\leq x<2.\right.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\leq x<2.$

2. Решим второе неравенство системы:



Решение второго неравенства исходной системы: $x\leq -3;x=0 ;1\leq 1x<4.$

3.Решение исходной системы неравенств : $x=-3;x=0;1\leq x<2.$

Ответ: $-3; 0; \left[1;2\right).$

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обоснованно получен верный ответ  | 3 |
| Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но не проведено обоснованного сравнения значений конечных точек найденных промежутков | 2 |
| Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**C4** Две окружности касаются внешним образом к точке K. Прямая АВ касается первой окружности в точке А, а второй - в точке В. Прямая ВК пересекает первую окружность в точке D, прямая АК пересекает вторую окружность в точке С.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



**Решение**.

а) Обозначим центры окружностей O1 и O2 соответственно. Пусть общая касательная, проведенная к окружностям в точке К, пересекает АВ в точке М. По свойству касательных, проведенных из одной точки, АМ = КМ и КМ = ВМ. Треугольник АКВ, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена - прямоугольной.

Вписанный угол АКВ – прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD⊥AB$. Аналогично получаем, что $ВС⊥AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники ВКС и AKD подобны, $\frac{AD}{BC}=4$. Пусть SBKC = S, тогда SAKD = 16S.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S\_{AKD}}{S\_{AKB}}=\frac{DK}{KB}=\frac{AD}{BC}$, то есть SAKB = 4S. Аналогично, SCKD = 4S. Площадь трапеции ABCD равна 25S.

Вычислим площадь трапеции ABCD. Проведем к AD перпендикуляр O2H, равный высоте трапеции, и найдем его из прямоугольного треугольника O2HO1:

$O\_{2}H=\sqrt{O\_{1}O\_{2}^{2}-O\_{1}H^{2}}=4$.

Тогда

$S\_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\*AB=20$.

Следовательно, 25S = 20, откуда S = 0,8 SAKB = 4S = 3,2 .

Ответ: 3,2 .

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обоснованно получен верный ответ  | 3 |
| Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но не проведено обоснованного сравнения значений конечных точек найденных промежутков | 2 |
| Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

|  |
| --- |
| **С5** |

Найдите все значения *a* , при каждом из которых наименьшее значение функции *f* (*x*) = 2*ax* + | *x*2 − 8*x* + 7 | больше 1.

**Решение.**

1. Функция *f* имеет вид:

a) при *x*2 − 8*x* + 7 ≥ 0: *f* (*x*) = *x*2 + 2(*a* − 4)*x* + 7 , а её график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии

*x* = 4 − *a*;

б) при *x*2 − 8*x* + 7 < 0: *f* (*x*) = − *x*2 + (2*a* + 8)*x* − 7 , а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции *f* (*x*) показаны на рисунках:





2. Наименьшее значение функция *f* (*x*) может принять только в точках

*x* = 1 или *x* = 7, а если 4 − *a*∉[1; 7] – то в точке *x* = 4 − *a* .

3. Наименьшее значение функции *f* больше 1 тогда и только тогда, когда



|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обоснованно получен верный ответ  | 4 |
| Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки | 3 |
| Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна | 2 |
| Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

|  |
| --- |
| **С 6** |

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 3 − , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Решение.**

Пусть среди написанных чисел *k* положительных, *l* отрицательных и *m* нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому 4*k* −8*l* + 0⋅*m* = −3(*k* + *l* + *m*) .

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому *k* + *l* + *m* — количество целых чисел — делится на 4. По условию

40 < *k* + *l* + *m* < 48, поэтому *k* + *l* + *m* = 44 . Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство 4*k* −8*l* = −3(*k* + *l* + *m*) к виду 5*l* = 7*k* + 3*m* . Так как *m* ≥ 0 , получаем, что 5*l* ≥ 7*k* , откуда *l* > *k* . Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим *k* + *l* + *m* = 44 в правую часть равенства 4*k* −8*l* = −3(*k* + *l* + *m*): 4*k* − 8*l* = −132 , откуда *k* = 2*l* − 33. Так как *k* + *l* ≤ 44 , получаем: 3*l* − 33 ≤ 44, 3*l* ≤ 77, *l* ≤ 25, *k* = 2*l* − 33 ≤17; то есть положительных чисел не более 17.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда



указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

**Ответ:** а) 44; б) отрицательных; в) 17.

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание критерия | Баллы |
| Верно выполнены пункты: а), б), в,) | 4 |
| Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), в) | 3 |
| Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в) | 2 |
| Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), в) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев,перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |